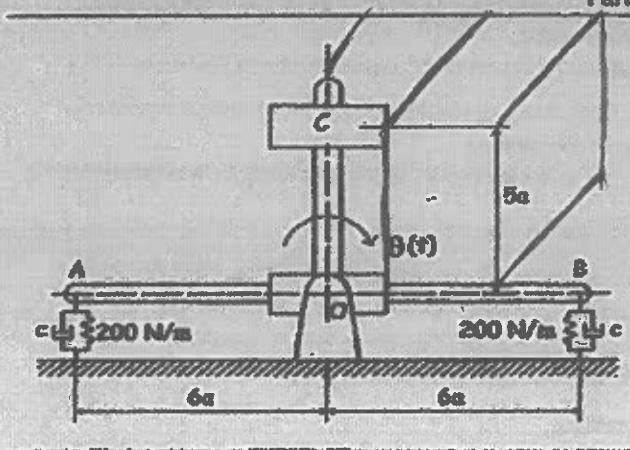


1) O pêndulo representado na figura oscila em torno do ponto O, sendo o seu movimento controlado por dois conjuntos mola-amortecedor. Num ensaio em regime livre, foram lidos os seguintes valores sequenciais para o deslocamento angular máximo (relativo) em torno da posição de equilíbrio estático: $10°$, $-7°$, $4.9°$, $-3.4°$.

Considerando uma massa $m = 3\text{kg}$ concentrada em C e desprezando a massa das barras $\overline{AB}$ e $\overline{OC}$, estabelecer:

a) (20%) a equação diferencial do movimento.

Para $a = 0.04$ m, determinar:

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

c) (10%) a razão de amortecimento ξ;

d) (10%) o valor da constante c de cada amortecedor;

e) (10%) o período natural de vibração T_d.

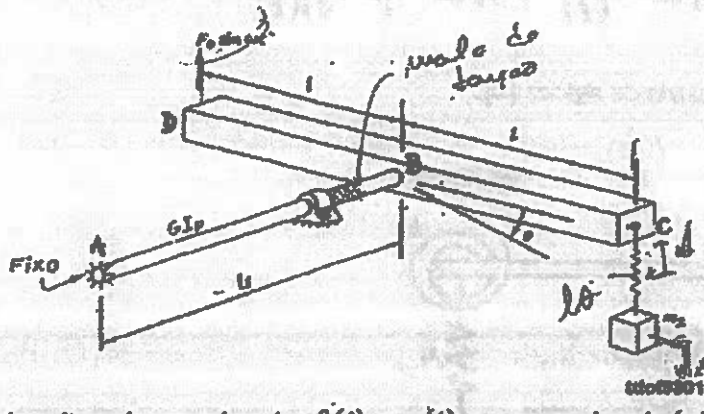
Admitindo uma perturbação inicial $\dot{\theta}_0 = 10\ rad/s$,

f) (15%) determinar o instante em que o sistema passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio estático;

g) (15%) determinar a energia dissipada pelo sistema até regressar definitavamente à posição de equilíbrio estático.

Para uma solicitação harmónica $M(t) = M_0 \cos \omega t$,

h) (10%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que assegure um factor de amplificação dinâmica inferior a $\sqrt{2}$.



2) O sistema representado na figura é constituído por um veio fixo em A e ligado em B a uma barra rígida de massa m_1. Na extremidade C da barra está ligada uma mola de rigidez k a qual se encontra ligada a uma massa concentrada m_2. Na extremidade D da barra está aplicada uma solicitação harmónica $f(t) = F \sin \omega t$. O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas $\theta(t)$ e $x(t)$ e a massa do veio é desprezável face à massa da barra.

a) (20%) Escrever literalmente as equações do movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores numéricos seguintes:

$$m_1 = m_2 = 3m \qquad \ell_1 = \ell = 1\ \text{m} \qquad k = 160\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \qquad GI_p = 80\ \text{N}\cdot\text{m}^2$$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração;

c) (10%) Representar graficamente as formas naturais de vibração;

d) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal;

e) (20%) Para a solicitação harmónica $f(t) = F_0 \sin \omega t$, determinar a amplitude da resposta $x(t)$ e $\theta(t)$ para $m = 2$ kg e $\omega = 8$ rad·s^{-1}. Comentar o resultado. Esboçar graficamente a variação das amplitudes de resposta em função da frequência.

f) (20%) Redimensionar a constante de rigidez k da mola de modo que a frequência fundamental do sistema seja inferior a 2 rad·s^{-1}.

3) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ está encastrada na extremidade $x = 0$ e, na extremidade $x = \ell$ está apoiada por uma mola elástica linear e por uma mola elástica angular de rigidez k_ℓ e k_r, respectivamente, conforme se representa na figura.

a) (15%) Escrever as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Estabelecer, justificando, as condições de aplicabilidade da função polinomial $V(x) = ax^2 + bx + c$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh.

c) (20%) Determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

d) (20%) Discutir a aplicabilidade da função de aproximação proposta para os seguintes valores limite da rigidez:

i) $k_\ell \to 0$ e $k_r \to 0$

ii) $k_\ell \to 0$ e $k_r \to \infty$

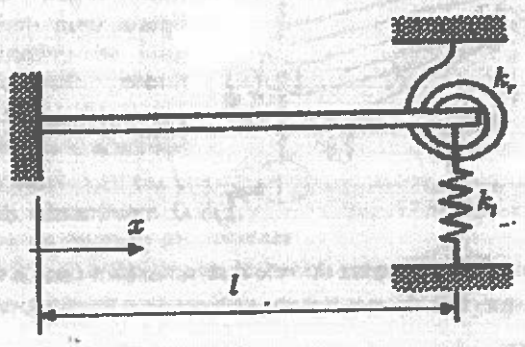
iii) $k_\ell \to \infty$ e $k_r \to 0$

iv) $k_\ell \to \infty$ e $k_r \to \infty$

e) (15%) Determinar o valor aproximado da frequência fundamental de vibração da viga quando $k_\ell = k_r = 0$, e comparar com o correspondente valor exacto. Comentar.

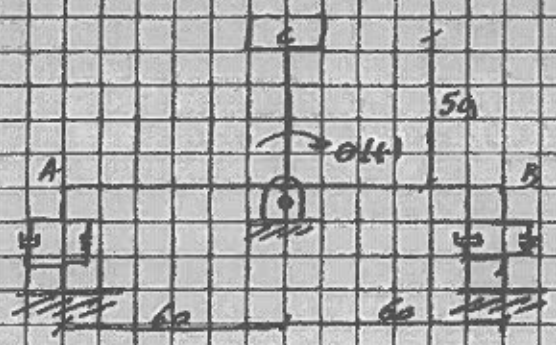
Utilizando as funções de aproximação $\psi_1(x) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^2$ e $\psi_2(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$ e o método de Rayleigh-Ritz,

f) (15%) determinar os coeficientes da matriz de rigidez $[k]$.



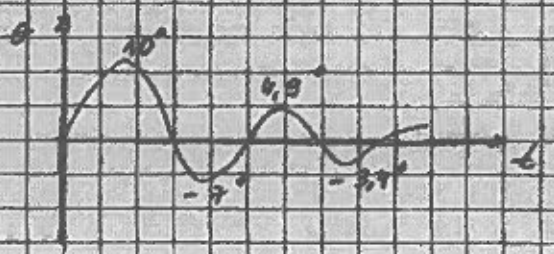
Exame 2007/01/15

Exercício 1



Deslocamento angular máximo:

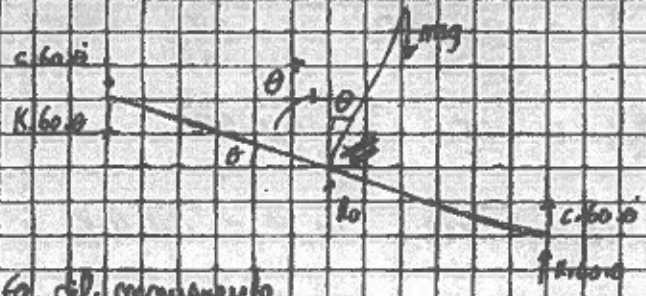
$10°, -7°, 4,9°, -3,9°$



$m = 3\ Kg$

a) Diagrama Corpo Livre Dinâmica

Linearizando para $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, pelo Teorema de Taylor.



Eq. dif. movimento

$$mg \cdot 5a \sin\theta - 2 \cdot (6aK\theta \cdot 6a\cos\theta) - 2 \cdot (6a c\dot\theta \cdot 6a\cos\theta) = I_O \ddot\theta$$

$$\Leftrightarrow 5a\theta mg - 72a^2K\theta - 72a^2c\dot\theta = I_O\ddot\theta$$

$$I_O = I_{G=O}^{\square} + m d^2 = \frac{1}{6}m(5a)^2 + m(5a)^2$$

Eq. final

$$25ma^2\ddot\theta + 72a^2c\dot\theta + 72a^2K\theta - 5a\theta mg = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25m\ddot\theta + 72c\dot\theta + \left(72K - \frac{5mg}{a}\theta\right)\theta = 0$$

b) $h = 0,06\ m \qquad m = 3\ Kg \qquad \omega_n = ?$

Eq. mov. $\rightarrow$ $\frac{25}{m}\ddot\theta + \frac{72c}{m}\dot\theta + \frac{10^3 25}{K}\theta = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{K\theta}{I_{G=O}}} = 17,96\ rad/s$

c) $\xi = ?$

Através do log. dec. vem e baseando-nos nos valores calculados a razão de amortecimento pelo decremento logarítmico

$$\delta = \frac{1}{1}\ln\frac{10}{4,9} = 0,7134 \Rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \boxed{0,113} \Rightarrow \text{Sistema Sub-amortecido}$$

d) o valor da constante c

$$\xi = \frac{c_{eq}}{2\, m_{eq} \cdot \omega_n} \Rightarrow 0{,}113 = \frac{72\, c}{2 \times 15 \times 11{,}96} \Rightarrow c = 2{,}82 \text{ Ns/m}$$

e) Período natural de vibração T_d

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \qquad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 11{,}96 \cdot \sqrt{1-0{,}113^2}$$

$$= 11{,}9 \text{ rad/s}$$

$$T_d = 0{,}53 \text{ s}$$

f) $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s

sistema sub-amortecido

resposta: $x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{\dot{\theta}_0 + 0}{\omega_d} = \frac{10}{11{,}9} = 0{,}84$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} = \tan^{-1} \frac{0{,}84}{0} = \frac{\pi}{2} \qquad A = 0{,}84$$

$$0 = 0{,}84 \cdot e^{-0{,}113 \cdot 11{,}96 \cdot t} \cdot \cos(11{,}9 \cdot t - \pi/2) \Rightarrow t = 0{,}04 \text{ s}$$

g)

07/10/15

1.(b) $\omega = ?$ $\mu < \sqrt{2}$

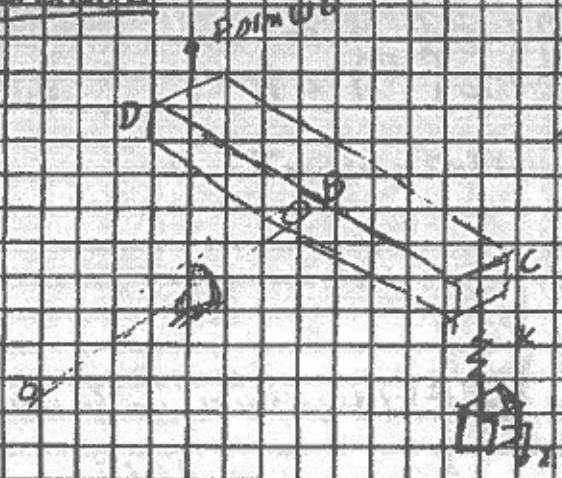
para $\xi = 0{,}113$ $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (0{,}226\beta)^2}} < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (0{,}226\beta)^2} < 2 \Rightarrow \beta_1 = 0{,}551 \Rightarrow \omega_1 = 0{,}551 \times 11{,}96 = 6{,}6 \text{ rad/s}$$

$$\beta_2 = 1{,}283 \Rightarrow \omega_2 = 1{,}283 \times 11{,}96 = 15{,}34 \text{ rad/s}$$

Exercício 2



1º grau de liberdade – θ

2º grau de liberdade – x

$$K_t = \frac{Ht}{\theta} = \frac{6 \cdot I_p}{l_1}$$

a) Eq. do movimento utilizando o formalismo de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial \theta}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = F \sin \omega t \qquad \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Energia Cinética: $T = \frac{1}{2} y_s \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot x^2$

$$y_s = \frac{1}{12} m_1 (2L)^2 = \frac{2}{12} m_1 L^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot x^2$$

$$= \frac{4}{12} m_1 L^2 = \frac{2}{12} \cdot 3 m L^2 \dot\theta^2 + \frac{3}{2} m \dot x^2$$

$$= \frac{1}{2} m L^2 \dot\theta^2 + \frac{3}{2} m \dot x^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_t \theta^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} \frac{6 I_p}{l_1} \theta^2 + \frac{1}{2} K (\overbrace{l\theta - x}^{\Delta x \text{ de } -x})^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = m L^2 \dot\theta \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot x} = 3 m \dot x \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = m L^2 \ddot\theta \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) = 3 m \ddot x$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{6 I_p \theta}{l} + l K (l\theta - x) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -K (l\theta - x)$$

$$\begin{cases} mL^2\ddot{\theta} + \left(\frac{6I_0}{L}\theta + lK(l\theta - x)\right) = LF_0 \sin \omega t \\ 3m\ddot{x} - K(l\theta - x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mL^2\ddot{\theta} + \left(\frac{6I_0}{L} + l^2K\right)\theta - lKx = LF_0 \sin \omega t \\ 3m\ddot{x} + Kx - Kl\theta = 0 \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6I_0}{L} + l^2K & -lK \\ -lK & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} LF_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $l = L = 1m$ $\quad K = 160\ N/m$ $\quad 6I_0 = 80\ N.m^2$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Problema característico: $\quad \Delta(\omega) = |[K] - \omega^2[m]| = 0$

$$\begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 240 - m\omega^2 & -160 \\ -160 & 160 - 3m\omega^2 \end{vmatrix} = (240 - m\omega^2)(160 - 3m\omega^2) - (-160)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{3,92}{\sqrt{m}} \qquad \omega_2 = \frac{16,67}{\sqrt{m}}$$

Formas modais de vibração:

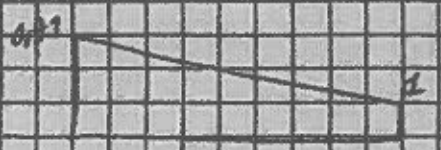
- $\omega_1 = \frac{3,92}{\sqrt{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 240 - m \cdot \frac{3,92^2}{m} & -160 \\ -160 & 160 - 3m \cdot \frac{16,67^2}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$(240 - 3,92^2) U_{11} - 160\, U_{21} = 0 \Rightarrow \frac{U_{21}}{U_{11}} = 0,71 \Rightarrow \{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0,71 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- $\omega_2 = \frac{16,67}{\sqrt{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 240 - m \cdot \frac{16,67^2}{m} & -160 \\ -160 & 160 - 3m \cdot \frac{16,67^2}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

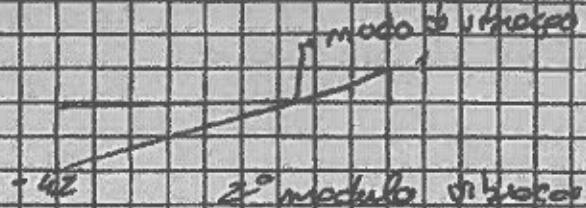
$$(240 - m \cdot 16,67^2) U_{12} - 160\, U_{22} = 0 \Rightarrow \frac{U_{12}}{U_{22}} = -4,2 \Rightarrow \{U_2\} = \begin{Bmatrix} -4,2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2-c)



1º modulo vibração

(as massas movimentam-se em fase)



2º modulo vibração

(as massas movimentam-se em oposição de fase)

d) equações do movimento na base modal

vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{\{u\}_1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} = \begin{Bmatrix} 0{,}38/\sqrt{m} \\ 0{,}53/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{\{u\}_2}{\sqrt{\{u\}_2^T \cdot [m] \cdot \{u\}_2}} = \begin{Bmatrix} -0{,}92/\sqrt{m} \\ 0{,}22/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

matriz modal

$$\phi = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \end{array}$$
$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{0{,}38}{\sqrt{m}} & -\frac{0{,}92}{\sqrt{m}} \\ \frac{0{,}53}{\sqrt{m}} & \frac{0{,}22}{\sqrt{m}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}$$

$$\underbrace{[\phi]^T [m] [\phi]}_{[I]} \{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\phi]^T [k] [\phi]}_{[\Omega]^2} \{\eta(t)\} = [\phi]^T \{f(t)\}$$

(devido à ortogonalidade dos vectores modais)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} f_1(t) + \phi_{21} f_2(t) \\ \phi_{12} f_1(t) + \phi_{22} f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + \frac{15{,}4}{\sqrt{m}} \eta_1(t) = \frac{0{,}38\, F_0}{\sqrt{m}} \\ \ddot{\eta}_2(t) + \frac{277{,}9}{\sqrt{m}} \eta_2(t) = \frac{-0{,}92\, F_0}{\sqrt{m}} \end{cases}$$

e) $f(t) = F_0 \sin \omega t$ $\quad x(t)$ e $\theta(t)$ $\quad m = 2\,kg$ $\quad \omega = 8\ rad/s$

amplitude da resposta $x(t)$ e $\theta(t)$

$$\Theta(\omega) = \frac{Z_{22} F_1 - Z_{12} F_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \qquad X(\omega) = \frac{Z_{11} F_2 - Z_{12} F_1}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 240 - 8^2 \times 3 \times 2 & -160 \\ -160 & 160 - 8^2 \times 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -144 & -160 \\ -160 & -224 \end{bmatrix}$$

$$\Theta(\omega) = \frac{-224 \times F_0}{-144 \times (-224) - (-160)^2} = -0{,}004\, F_0\ [m]$$

$$X(\omega) = \frac{-160 \times F_0}{} = -0{,}003\, F_0\ [m]$$

Ex

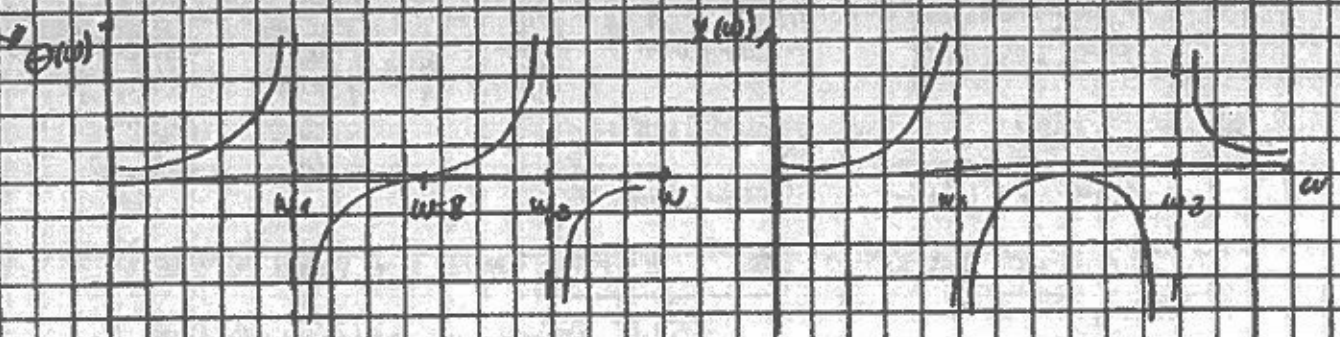
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos \omega t \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \Theta(\omega) \cos \omega t$

$x(t) = X(\omega) \cos \omega t \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2 X(\omega) \cos \omega t$

$$\begin{cases} -2\omega^2 \Theta(\omega) \cos \omega t + 240\, \Theta(\omega) \cos \omega t - 160\, X(\omega) \cos \omega t = F_0 \\ -6\omega^2 X(\omega) \cos \omega t - 160\, \Theta(\omega) \cos \omega t + 160\, X(\omega) \cos \omega t = 0 \end{cases}$$

f) Ridimensionar constante K para freq. fund. < 2 rad/s



$\omega < \omega_1 \Rightarrow$ as massas movem-se em fase
$\omega > \omega_2 \Rightarrow$ " " " " oposição de fase.

f) $\omega = 2$ rad/s

matriz de rigidez $K = \begin{bmatrix} 80+K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$

$[Z] = \begin{bmatrix} 80+K-24 & -K \\ -K & K-24 \end{bmatrix}$ $\qquad K \downarrow \omega \downarrow$

$$-0{,}004\, \cancel{F_0} = \frac{(K-24) \cdot \cancel{F_0}}{(80+K)(K-24) - (-K)^2} \Leftrightarrow K = \underline{22{,}5} \text{ N/m}$$

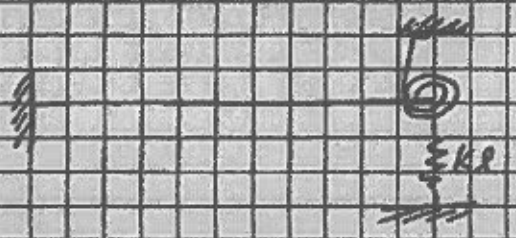
faz sentido pois para uma "suspensão" mais macia menor a frequência!!

007/10/15

Exercício 3

· comprimento l / secção recta A / momento 2ª ordem I / E / ρ

$x=0 \Rightarrow$ encastrada



a) condições de fronteira

$x=0$ | · $V(x=0)=0$ (deslocamento)

· $\frac{dV}{dx}(x=0)=0$ (rotação)

$x=l$ | · $EI\frac{d^2V}{dx^2}(x=l)=0$ (Momento)

· $EI\frac{d^3V}{dx^3}(x=l)=0$ (Esf. Transversa)

b) $V(x) = ax^2+bx+c$

Atendendo a que se trata de um caso de flexão o sistema é de 4ª ordem. De modo à função ser aplicável terá de ser derivável metade das vezes da ordem do sistema.

$V'(x) = 2ax+b \qquad V''(x) = 2a$

Tem também de satisfazer as condições de fronteira:

$V(x=0)=0 \Leftrightarrow a\times 0^2+b\times 0+c=0 \Rightarrow c=0$

$V'(x=0)=0 \Leftrightarrow 2a\times 0+b=0 \Rightarrow b=0$

Logo a função terá de ser $V(x)=ax^2$

c) Determinar uma estimativa da freq. funda. vibração.

Pelo método da energia de Rayleight e para vibração de flexão de vigas temos:

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{cfm}$$

$$T_{máx} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A(x)\,(V(x))^2 dx + T_{cfm}\right)$$

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(2a)^2 + \frac{1}{2}K_{ang}(2ax)^2 + \frac{1}{2}K_l\,(ax^2)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[EI\,4a^2x\Big|_0^l + \frac{1}{2}K_{ang}\,\frac{4}{3}a^2x^3\Big|_0^l + \frac{1}{10}K_l\,a^2x^5\Big|_0^l\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(EI\,4a^2l + \frac{2}{3}K_{ang}\,a^2l^3 + \frac{1}{10}K_l\,a^2l^5\right)$$

$$T_{máx} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\,(ax^2)^2 dx\right) = \omega^2\,\frac{1}{2}\,\rho A\,\frac{1}{4}a^2x^5\Big|_0^l = \frac{1}{10}\,\omega^2\rho A a^2 l^5$$

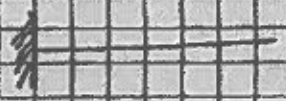
$V_{max} = T_{max}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(EI\,4q^2 l + \frac{2}{3}k_a q^2 l^3 + \frac{1}{10}k_l q^2 l^5\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\omega^2 \rho A q^2 l^5\right)$$

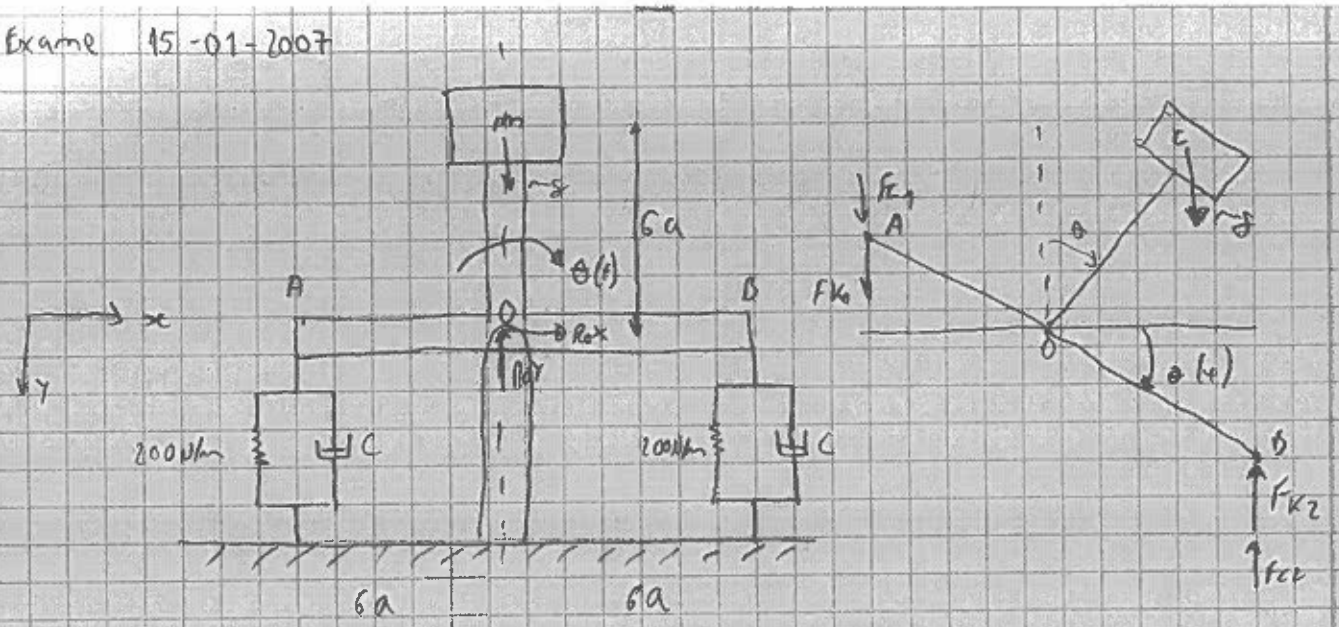
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4EI + \frac{2}{3}k_a l^2 + \frac{1}{10}k_l l^4}{\frac{1}{5}\omega^2 \rho A l^4} \Rightarrow \omega = \sqrt{\ldots}$$

d)

i) $k_l \to 0 \quad k_s \to 0$



Esame 15-01-2007



$\theta(t)|_{max} = 10°, -7°, 49° e -34°$

a) $\vec{F} = \vec{Q} = 0 \quad R_0^x = 0 \qquad R_0^y = mg$

$$\vec{OA} = \begin{vmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{OB} = \begin{vmatrix} 6a\cos\theta \\ +6a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{OG} = \begin{vmatrix} 5a\sin\theta \\ -5a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F_{K1} = -K\Delta A^y = \begin{vmatrix} 0 \\ +6aK\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \qquad F_{K2} = -K\Delta B^y = \begin{vmatrix} 0 \\ -6aK\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F_{C1} = -C\dot{A}^y = \begin{vmatrix} 0 \\ +6aC\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \qquad F_{C2} = -C\dot{B}^y = \begin{vmatrix} 0 \\ -6aC\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$J^O = J_G + m d_{OG}^2 = 3 \times (5a)^2 = 3 \times 75a^2 = 75a^2 \qquad \vec{K_O} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 75a^2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{OA} \times \vec{F_{K1}} + \vec{OA} \times \vec{F_{C1}} + \vec{OB} \times \vec{F_{K2}} + \vec{OB} \times \vec{F_{C2}} = \vec{K_O}$$

$$\begin{vmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ +6aK\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ +6aC\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6a\cos\theta \\ +6a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -6aK\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6a\cos\theta \\ +6a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -6aC\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

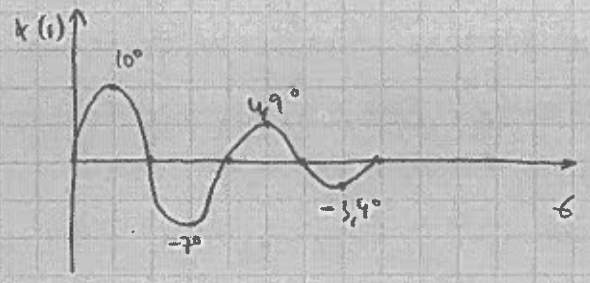
$$\begin{vmatrix} 5a\sin\theta \\ -5a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ +mg \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 75a^2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$-36a^2K\cos\theta\sin\theta + 36a^2C\dot{\theta}\cos^2\theta - 36a^2K\sin\theta\cos\theta + 36a^2C\dot{\theta}\cos^2\theta + 5amg\sin\theta = 75a^2\ddot{\theta}$$

linearizzando $\cos\theta \simeq 1 \qquad \sin\theta \simeq \theta$

$$-36a^2K\theta - 36a^2C\dot{\theta} - 36a^2K\theta - 36a^2C\dot{\theta} + 5amg\theta = 75a^2\ddot{\theta}$$

$$75a^2\ddot{\theta} + 72Ca^2\dot{\theta} + (72a^2K - 5amg)\theta = 0$$



$10° = \frac{2\pi \times 10}{360} = 0,17453$

$-7° = \frac{2\pi \times (-7)}{360} = -0,122173$

$4,9° = \frac{2\pi \times 4,9}{360} = 0,085521$

$-3,4° = \frac{2\pi \times (-3,4)}{360} = -0,059341$

Con $a = 0,04$ m

$$75 \times 0,04^2 \ddot{\theta} + 72C(0,04^2)\dot{\theta} + (72(0,04^2)K - 5 \times 0,04 \times 3 \times 98)\theta = 0$$

$$0,12\ddot{\theta} + 0,1152C\dot{\theta} + (0,1152K - 5,88)\theta = 0$$

$m_{eq} = 0,12$

$K_{eq} = (0,1152K - 5,88) = 0,1152 \times 200 - 5,88 = 17,16$

$C_{eq} = 0,1152C$

b) $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{17,16}{0,12}} = 11,96$ rad/s

c) $\zeta = \frac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} = \frac{0,1152C}{2 \times 0,12 \times 11,96}$

$$\ln \frac{x(t_1)}{x(t_2 = t_1 + T)} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \ln \frac{0,17453}{0,085521} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \zeta = 0,1128$$

Sistema sub-amortecido

d) $0,1128 = \frac{0,1152C}{2 \times 0,12 \times 11,96}$ $\quad C = \frac{0,1128 \times 2 \times 0,12 \times 11,96}{0,1152} = 2,81$ Ns/m

e) $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ $\quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 11,96 \times \sqrt{1-0,1128^2} = 11,884$ rad/s

$T_d = \frac{2\pi}{11,884} = 0,529$ s

f) $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s

$$t|_{x(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left(\frac{2-1}{2}\pi + \phi\right) = \frac{1}{11,884}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{11,884} = 0,2644 \text{ s} \checkmark$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,\theta_0} = \tan^{-1} \frac{0,17453}{0} = \tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2}$$

g) $\Delta E = E_0 - E(t)$

$$E_0 = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{K_{eq}}_{=0} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \times 0,12 \times 10^2 = 6 \text{ J}$$

Pelo método da energia de Rayleigh → desprezando o amortecimento por o sistema não é amortecido

A energia num sistema conservativo

$E(t) = T(t) + V(t)$

$T(t) = 0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = 0$ $\quad V(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = 0$

$\Delta E = E_0 = 6\,J$

b) $M(t) = M_0 \cos \omega t$

$\omega = ?$ $\quad \mu < \sqrt{2}$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} < \sqrt{2} \qquad \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \times 0{,}1128\beta)^2}}$$

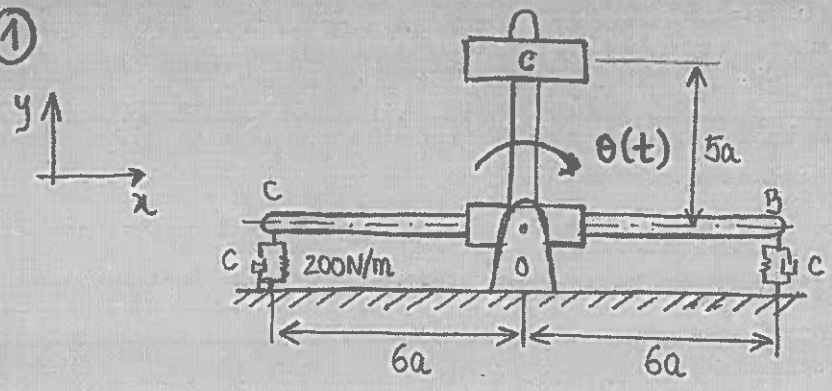
$\beta = 1{,}283$ ou $\beta = 0{,}5513$

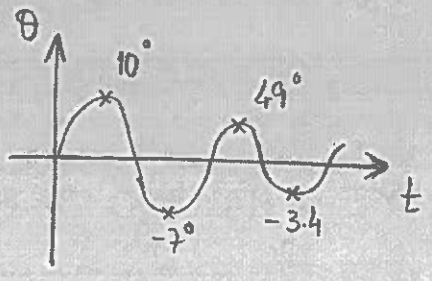
Para $\beta = 1{,}283 \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{\omega_n}$ $\quad \omega = \beta \times \omega_n = 1{,}283 \times 11{,}96 = 15{,}34\ rad/s$

Para $\beta = 0{,}5513 \Rightarrow \omega = 0{,}5513 \times 11{,}96 = 6{,}59\ rad/s$

Exame de 2007-01-15

PARTE PRÁTICA 1

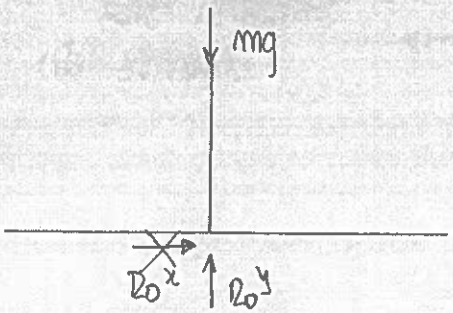
① 



Regime livre: $10°; -7°; 4.9°; -3.4°$

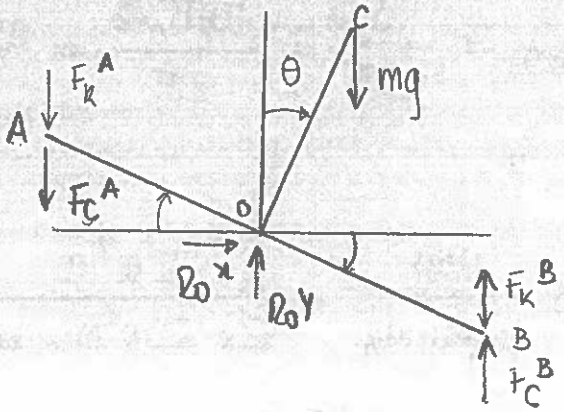
$m = 3\,kg$

a) Equilíbrio estático



$R_0^y = mg$

Equilíbrio dinâmico



$$\vec{F}_K^A = -K \begin{vmatrix} 0 \\ 6a\theta \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{F}_C^A = -C \begin{vmatrix} 0 \\ 6a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_O \ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}_K^B = -K \begin{vmatrix} 0 \\ -6a\theta \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{F}_C^B = -C \begin{vmatrix} 0 \\ -6a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

com $J_O = \cancel{J_O^5}^{=0} + J_O^m = m(5a)^2$

$$\vec{OA} \times (F_K^A + F_C^A) + \vec{OB} \times (F_K^B + F_C^B) + \vec{OC} \times m\vec{g} = \vec{K}_O$$

$$\begin{vmatrix} -6a \\ 6a\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \left(\begin{vmatrix} 0 \\ -K6a\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -C6a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} 6a \\ -6a\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \left(\begin{vmatrix} 0 \\ K6a\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ C6a\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} 5a\theta \\ 5a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 25a^2 m \end{vmatrix}$$

$$36a^2K\theta + 36a^2C\dot{\theta} + 36a^2K\theta + 36a^2C\dot{\theta} - 5a\theta mg = 25a^2m\ddot{\theta}$$

$$25a^2m\ddot{\theta} + 72a^2C\dot{\theta} + (72a^2K - 5amg)\theta = 0$$

Para $a = 0{,}04$ m

b) $\omega_m = ?$

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{72a^2K - 5amg}{25a^2m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{72 \times 0{,}04^2 \times 200 - 5 \times 0{,}04 \times 3 \times 9{,}8}{25 \times 0{,}04^2 \times 3}} = 11{,}96 \text{ rad/s}$$

c) $\xi = ?$

$$\delta = \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + T)} = \ln \frac{10}{4{,}9} = 0{,}7133$$

$$\xi_{aprox} = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0{,}7133}{2\pi} = 0{,}113 \rightarrow \text{SISTEMA SUB-AMORTECIDO}$$

d) $c = ?$

$$\xi = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \cdot \omega_m} = \frac{72 a^2 c}{2 \times 25 a^2 m \times \omega_m}$$

$$0{,}113 = \frac{72\,c}{2 \times 25 \times 3 \times 11{,}96} \therefore \quad c = 2{,}82 \text{ Ns/m}$$

e) $T_d = ?$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \omega_m \sqrt{1 - \xi^2} = 11{,}96\sqrt{1 - 0{,}113^2} = 11{,}88 \text{ rad/s}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{11{,}88} = 0{,}53 \text{ s}$$

f) $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s

$$x(t) = A e^{-\xi \omega_m t} \cos(\omega_d \cdot t - \phi)$$

$$\text{com} \begin{cases} A_1 = \theta_0 = 0 \\ A_2 = \dfrac{\dot{\theta}_0 + 0}{\omega_d} = \dfrac{10}{11{,}88} = 0{,}84 \end{cases} \rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{0{,}84^2} = 0{,}84$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{A_2}{A_1} = \tan^{-1}\left(\frac{0,84}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = 0,84\, e^{-0,113 \times 11,96 t} \cos(11,88t - \pi/2)$$

Para $x(t) = 0 \;\therefore\; t = 0,264\ s$?

h) $M(t) = M_0 \cos \omega t \qquad \beta = \frac{\omega}{\omega_n}$

$\mu < \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} < \sqrt{2} \;\therefore\; \begin{cases} \beta_1 = 0,551 \rightarrow \omega = 0,551 \times 11,96 = 6,6 \text{ rad/s} \\ \beta_2 = 1,283 \rightarrow \omega = 1,283 \times 11,96 = 15,34 \text{ rad/s} \end{cases}$$

↳ com $\xi = 0,113$